

18 Hinweise zu den Übungsaufgaben

18.1 Zum 1. Kapitel

Zu Aufgabe 1.4.1

Bei a) ist nach der Anzahl 11-elementiger Teilmengen aus einer Menge von 14 Elementen gefragt:

$$\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = (14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 4) / (11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 1) = 364$$

Zu b): Eine Mannschaftsaufstellung ist ein 11-tupel aus einer Menge von 14 Spielern. Da es $11!$ Vertauschungen von den Spielern einer Mannschaft gibt, erhalten wir $11!$ mal so viele Mannschaftsaufstellungen wie Mannschaften, also $11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 364 = 14\,529\,715\,200$ Mannschaftsaufstellungen.

Zu Aufgabe 1.4.2

Zu a): Genotypen $A_i A_i$ gibt es so viele wie einelementige Teilmengen von $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$. Das sind 6 Genotypen. Genotypen $A_i A_j$ mit $i \neq j$ gibt es so viele wie zweielementige Teilmengen von $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$. Das sind weitere $\binom{6}{2} = 15$ Genotypen. Zusammen erhalten wir 21 Genotypen.

Zu b): Nach 1.1.22 gibt es 243 Genotypen. Normale Genotypen gibt es so viele wie Wörter mit 5 Buchstaben aus dem Alphabet $\{\mathcal{D}, \mathcal{H}\}$ mit den zwei Buchstaben $\mathcal{D}$ und $\mathcal{H}$. Das sind $2^5 = 32$ normale Genotypen. Dann gibt es $243 - 32 = 211$ abnormale Genotypen.

Zu Aufgabe 1.4.3

Ergebnis zu a): 15 000

Ergebnis zu b): Die Sonne ist um den Faktor 180 weiter weg.

Zu Aufgabe 1.4.4

Ergebnisse: a) $x = 0, 1$ b) $x = \underline{10}$ c) $x = 3$

18.2 Zum 2. Kapitel

Die Aufgabe 2.4.1 sollte ohne Hinweise lösbar sein.

18.3 Zum 3. Kapitel

Zu Aufgabe 3.5.1

Ergebnisse:

a) $Z_u = L$, $Z_o = S$ b) Die Messreihe hat ungeraden Umfang. Also ist der Median erklärt. $Z = S$ c) $Z_u = Z_o = Z = M$

Wir sehen im Beispiel c), dass auch bei geradem Umfang der Messreihe der Median erklärt sein kann. Die Beschreibung der Ergebnisse für die Zentralwerte bedeutet in der Alltagssprache z. B. im Beispiel c): Mindestens die Hälfte ist höchstens mittelschwer erkrankt und mindestens die Hälfte ist mindestens mittelschwer erkrankt.

Zu Aufgabe 3.5.2

a) $\bar{x} = 22,2$ b) Median = 23,5 c) Minimum = 11 d) Maximum = 28 e) Spannweite = 17 f) $q_{0,25} = 21$ g) $q_{0,75} = 25$ h) Quartilsabstand = 4 i) $s^2 = 19,36$ j) $s = 4,4$

Zu Aufgabe 3.5.3

Hinweis: Bei b) ist die Gleichung $0,5 = F(5) + \frac{r(6)}{1}(Z - 5)$ nach Z aufzulösen.

18.4 Zum 4. Kapitel

Zu Aufgabe 4.5.1

Beispielsweise die Lösung von a):

$B \cap C$ Dies sind die nichtrauchenden Heimbewohner.

$\overline{B \cap C}$ Die Personen dieser Gruppe sind genau die Raucher oder nicht im Heim Wohnende.

$A \cap (\overline{B \cap C})$ Die Personen dieser Gruppe sind genau die männlichen Raucher oder die nicht im Heim wohnenden männlichen Personen.

Zu Aufgabe 4.5.2

Zu b): Beachte, dass $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \dot{\cup} B$ und $A = A \setminus (A \cap B) \dot{\cup} (A \cap B)$. Dabei bedeutet das Vereinigungszeichen mit einem Punkt $\dot{\cup}$, dass es sich um eine disjunkte Vereinigung handelt, d. h. der Durchschnitt der zu vereinigenden Mengen leer ist.

Zu c): Es geht nicht nach der Oder-Regel, weil die Ereignisse nicht disjunkt sind; denn $A \cap B$ sind die Taubblinden, von denen es in großen Bevölkerungsgruppen einige gibt. Es geht auch nicht nach der Und-Regel, da das eine Alltagssprachliche Formulierung mit dem Wort "und" ist, das nichts mit der mathematischen Regel zu tun hat. Es geht nach der in b) hergeleiteten Regel. Sei B die Bevölkerungsgruppe der Blinden, T die Gruppe der Tauben. Dann besteht $B \cup T$ aus den Personen, die blind oder taub sind, d.h. aus den Blinden und den Tauben, und $B \cap T$ besteht aus denjenigen, die blind und taub sind.

$$P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T) = 0,0085 + 0,0050 - 0,0006 = 0,0129$$

Zu Aufgabe 4.5.3

Bei a) sind die Ereignisse unabhängig, bei b) abhängig und bei c) ebenfalls abhängig.

18.5 Zum 5. Kapitel

Zu Aufgabe 5.6.1

Es muss die Binomialverteilung $b_{101,p}$ mit $p = 0,99$ herangezogen werden. Ihr Erwartungswert ist $\mu = n \cdot p = 101 \cdot 0,99 = 99,99$. Er kann 100 Keimlinge erwarten, aber nur im Mittel!

Die Wahrscheinlichkeit von mindestens 100 Keimlingen ist:

$P(\{100, 101\}) = P(100) + P(101) = b_{101,p}(100) + b_{101,p}(101) = \binom{101}{100} p^{100} (1-p)^1 + \binom{101}{101} p^{101} = 101 \cdot 0,366 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,362 = 0,370 + 0,362 = 0,732 = 73,2\%$. Was hatten Sie geschätzt?

Zu Aufgabe 5.6.2

a) $r = 0,592$ $p = 0,301$ $q = 0,106$

b) Man muss zunächst alle 4-Tupel (k_1, k_2, k_3, k_4) aufschreiben mit $k_1 > 0, k_j \geq 0$ für $j = 2, 3, 4$ und $\sum_{i=1}^4 k_i = 3$ und dann die Wahrscheinlichkeiten $P(k_1, k_2, k_3, k_4)$ davon ausrechnen und zusammenzählen. Es ergibt sich, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 72,5 % einer mit Blutgruppe 0 dabei ist.

18.6 Zum 6. Kapitel

Zu Aufgabe 6.8.1

Ergebnisse: a) 5 000 000 Einwohner b) Nach 200 Jahren 6 670 855 Einwohner

Zu Aufgabe 6.8.2

J bezeichne den jetzigen Jahresverbrauch. Dann ist $x_0 = 30J$. Sei x_n der Erdölvorrat in n Jahren bei jährlicher Einsparung des Jahresverbrauchs um p %. Sei $q = 1 - p$. Zeige schrittweise für $n = 1, 2, \dots, n$:

$$x_{n+1} = x_0 - Jq(1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$

Nutze die Summenformel für die endliche geometrische Reihe und lasse n gegen ∞ gehen. In der Ungleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ setze $q = 1 - p$ ein und löse die Ungleichung nach p auf.

Das Ergebnis lautet: Die jährliche Einsparung muss mindestens $\frac{1}{31} \approx 3,23\%$ betragen.

Zu Aufgabe 6.8.3

Es handelt sich um einen exponentiellen Abnahmeprozess bei konstanter Zufuhr $x_{n+1} = qx_n + d$. Sein positives Gleichgewicht liegt bei $B = \frac{d}{1-q}$. Wenn $x_n \leq 6$ sein soll für alle n , so muss auch $B \leq 6$ sein (Satz 6.4.9). Da am Anfang die Giftmenge weniger als 6 mg sein soll, haben wir einen monoton wachsenden Entwicklungsprozess (Satz 6.4.8). Es genügt daher, dafür zu sorgen, dass $B \leq 6$ ist. Daraus rechnet sich aus, dass $d \leq 3$ bei 50 % und $d \leq 1,5$ bei 25 % Ausscheidung sein muss.

Zu Aufgabe 6.8.4

Ergebnis: $a = 2000$, $b = 500$ und nach drei Jahren ist die Populationsgröße $x_3 = 1412$.

Zu Aufgabe 6.8.5

Ergebnisse:

- a) und b): $y_{n+1} = qy_n + d$ mit $q = b/a$ und $d = 1/a$
 c): $x_n = \frac{1}{A(b/a)^n + B}$ mit $B = \frac{1}{a-b}$ und $A = 1/x_0 - B$

18.7 Zum 7. Kapitel

Zu Aufgabe 7.3.1

Bei a) sind die Funktionswerte auszurechnen.

Bei b) ist $p(1) = 8$, $p(4) = 152$, $p(6) = 88$ und folglich ist die Funktion nicht monoton wachsend und daher für die Beschreibung eines Wachstumsprozesses nicht geeignet.

Zu Aufgabe 7.3.2

Hinweise wurden bereits in der Aufgabenstellung gegeben.

Zu Aufgabe 7.3.3

Man zeige, dass die Funktion $f(x) = \frac{ax}{x+b}$ streng monoton wachsend und durch a beschränkt ist.

18.8 Zum 8. Kapitel

Zu Aufgabe 8.7.1

Man setzt in das Model $x(t) = x_0 \cdot e^{pt}$ die Daten ein.

$x(12) = 100$ und $x(36) = 200$ bedeuten $100 = x_0 \cdot e^{12p}$ und $200 = x_0 \cdot e^{36p}$.

Dividiert man die letzte Gleichung durch die vorletzte, so erhält man $2 = e^{24p}$. Dies nach p aufgelöst ergibt $p = \frac{\ln(2)}{24} = 0,02888$. Die weiteren Ergebnisse lauten: $x_0 = 70,71$ g, $x(t) = 70,71 \cdot e^{0,02888 \cdot t}$, $x(37) = 205,86$ g.

Zu Aufgabe 8.7.2

Zu a): $\frac{u(t-1) - u(t)}{u(t-1)} = \frac{u_0 e^{-p(t-1)} - u_0 e^{-pt}}{u_0 e^{-p(t-1)}} = \frac{e^{-pt} e^p - e^{-pt}}{e^{-pt} e^p} = \frac{e^p - 1}{e^p} = 1 - e^{-p}$

Zu b): $u_0 = 0,5$ und folglich $u(30) = 0,2 = 0,5 e^{-30p}$. Diese Gleichung nach p aufgelöst, ergibt $p = \frac{-\ln(0,4)}{30}$ (> 0 !) und weiter errechnet man $1 - e^{-p} = 0,0301 = 3,01\%$. Die Bauchspeicheldrüse arbeitet ein wenig schwächer als normal.

18.9 Zum 9. Kapitel

Zu Aufgabe 9.7.1

Untersuchen Sie, wo $f'(x) > 0$ und wo $f'(x) < 0$ ist.

- a) Minimum bei 1 mit Wert 1. b) Maximum bei 1 mit Wert $\frac{1}{e}$. c) Minimum bei 0 mit Wert 0. d) Maximum bei 0 mit Wert 1.

Zu Aufgabe 9.7.2

Ergebnisse:

Zu a): $p_4(x) = 1 + x^2 + x^4/2$

Zu b): $p_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$

Zu Aufgabe 9.7.3

Ergebnisse: $x_{10} = 2.60$, $y_{10} = 2,718281801$, $e = 2,718281828$

Für x_{10} : $\Delta = 2,71 - 2,60 = 0,11$, $\Delta > 0,5 \cdot 10^k$ für $k = -1$, $\Delta < 0,5 \cdot 10^k$ für $k = 0$. Die -1 -te Stelle ist nicht signifikant, die 0 -te Stelle ist es. Dies ergibt folgende Angabe von e mit den signifikanten Stellen: $e = \underline{3}$

Für y_{10} : $\Delta = 2,718281828 - 2,718281801 = 0,000000027 = 0,27 \cdot 10^{-7} > 0,5 \cdot 10^{-8}$ aber $< 0,5 \cdot 10^{-7}$. Angabe von e mit signifikanten Stellen: $e = 2,7182818$

Fazit: Das Ergebnis lässt vermuten, dass $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sehr langsam gegen e konvergiert, dagegen die Exponentialreihe sehr schnell. Dies ist auch tatsächlich der Fall. Deshalb ist die Folge x_n schlecht für die Berechnung von e geeignet. Man verwendet stattdessen die Exponentialreihe.

18.10 Zum 10. Kapitel

Zu Aufgabe 10.6.1

Die Gleichgewichte sind die Lösungen der Gleichung $x e^{r(1-\frac{x}{K})} = x$. Dies hat $x = 0$ als eine Lösung. Sei $x \neq 0$. Dann ist x ein Gleichgewicht genau, wenn $e^{r(1-\frac{x}{K})} = 1$ ist, d. h. $r(1 - \frac{x}{K}) = 0$. Die einzige Lösung dieser Gleichung ist $x = K$.

Untersuchung auf Stabilität: Es ist: $f'(x) = e^{r(1-\frac{x}{K})}(1 - x\frac{r}{K})$.

$f'(0) = e^r$ und $1 < e^r$ für $0 < r$. Folglich ist $|f'(0)| > 1$, d. h. 0 ist ein instabiles Gleichgewicht.

$f'(K) = 1 - r$. Wegen $0 < r < 1$ ist $|f'(K)| < 1$ und K ein stabiles Gleichgewicht.

18.11 Zum 11. Kapitel

Zu Aufgabe 11.5.1

Ergebnisse: Zu a): 21, zu b): $2(e^2 - 1) = 12,78$, zu c): $1/2$, zu d): $\ln(2) + 1,219 = 1,91$

Zu Aufgabe 11.5.2

Ist $v(t)$ die momentane Verteilungsrate der gesamten Population, so ist $v(t) = 3x(t)$. Für eine sich pro Zeiteinheit verdoppelnde Population errechnet man $\lambda = \ln 2$ und $x(t) = 100 \cdot 2^t$.

$$\int_0^{28} v(t) dt = \int_0^{28} 300 \cdot 2^t dt = 300 \frac{2^t}{\ln 2} \Big|_0^{28} = \frac{300}{\ln 2} (2^{28} - 1) \approx 3,5 \text{ km} \times 3,5 \text{ km}$$

Zu Aufgabe 11.5.3

Die einzigen definierten uneigentlichen Integrale sind:

$$\text{b2) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \quad \text{c1) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

18.12 Zum 12. Kapitel

Zu Aufgabe 12.5.1

Bei einem exponentiellen Wachstum $x(t) = x_0 e^{pt}$ ist die Gleichung $x(t+1) - x(t) = 0,029x(t)$ zu betrachten. Es stellt sich heraus, dass sie gleichbedeutend ist mit $e^p - 1 = 0,029$. Daraus erhält man $p = 0,0286$ und die Gleichung $x_0 e^{p(t+\Delta t)} = 2e^{pt}$ führt auf $\Delta t = 24,2$ Jahre.

Zu Aufgabe 12.5.2

Es ist im Wesentlichen nur in die Formeln des Buches einzusetzen. Bei a) ergibt sich ein Anwachsen auf den Krankenstand von 50 000 Personen. Bei b) ergibt sich, dass die Gesundungsrate wenigstens auf 10 % verbessert werden muss.

Zu Aufgabe 12.5.3

b) und c): Für $C > 0$ ist $I =] - \infty, \ln(\frac{1}{C})[$ und $x(t)$ streng monoton wachsend. Für $C < 0$ ergibt sich $I =] - \infty, \infty[$ und $x(t)$ ist streng monoton fallend.

d): Für $C < 0$ ist $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Für $C > 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$ und $\lim_{t \rightarrow \ln(1/C)} x(t) = \infty$

e) Beziehung zwischen C und x_0 herstellen und beachten, was $C > 0$ für x_0 bedeutet.

Zu Aufgabe 12.5.4

Das Ergebnis kann man so formulieren, dass die Infektiösen ständig zurück gehen und schließlich (für $n \rightarrow \infty$) ganz verschwinden.

18.13 Zum 13. Kapitel

Zu Aufgabe 13.3.2

Die Rechnung entsprechend zu Abschnitt 13.2.7 liefert das Ergebnis: $n \geq 460515$

18.14 Zum 14. Kapitel

Zu Aufgabe 14.11.1

a) Ausfall von einem Anteil a nach t Jahren bedeutet: $1 - e^{-\lambda t} = a$. Auflösen dieser Gleichung nach t und Einsetzen von $a = 0,9$ und $a = 0,5$ ergibt das Ergebnis: Nach 5,3 Jahren fällt jedes zehnte Gerät aus und nach 34,7 Jahren ist die Hälfte ausgefallen.

b) Ergebnis: 1,7 %

Zu Aufgabe 14.11.2

Man errechnet $d = 2.60$. Es wird der Dezimalpunkt verwendet, weil bei der Bezeichnung von Intervallen bereits ein Komma vorkommt.

$[\mu - d, \mu + d] = [0.40, 5.60]$. In diesem Intervall liegen genau die Ausprägungen 1,2,3,4,5.
 $P([\mu - d, \mu + d]) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = (3 + 3^2/2 + 3^3/6 + 3^4/24 + 3^5/120)e^{-3} = 0.87$
 Nach der Tschebyscheffschen Ungleichung gilt $P([\mu - d, \mu + d]) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{d^2} = 0.56$. Hieraus ersehen wir, dass die Tschebyscheffsche Ungleichung in diesem Beispiel eine sehr grobe Abschätzung ist.

18.15 Zum 15. Kapitel

Zu Aufgabe 15.6.1

Als Ergebnis findet man die Funktion $y = 0,25 e^{0,11t}$.

18.16 Zum 16. Kapitel

Zu Aufgabe 16.6.1

Man beachte im folgenden, dass man Potenzen zur gleichen Basis miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert. Da es übersichtlicher ist, leiten wir die Likelihood-Funktion gleich für den allgemeinen Fall her.

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \dots \cdot P(x_n) \quad \text{Hier wird die Unabhängigkeit benutzt.} \\ &= (1-p)^{x_1-1} p \cdot (1-p)^{x_2-1} p \cdot \dots \cdot (1-p)^{x_n-1} p \\ &= (1-p)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} p^n \\ L(\Theta) &= (1-\Theta)^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)} \Theta^n \end{aligned}$$

Den Übergang von der vorletzten zur letzten Gleichung muss man so sehen: Im Zusammenhang mit einer geometrischen Verteilung war p ein bestimmter Wert. Lässt man nun p variieren, so wird es zur Variablen Θ der Likelihood-Funktion.

Die Anwendung des Satzes über den Vorzeichenwechsel der Ableitung (s. 9.5.3) ergibt, dass L ein absolutes Maximum für $\hat{\Theta} = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^n (x_i - 1)} = 4/22590 = 0,00018$ hat.

Zu Aufgabe 16.6.2

Das Ergebnis bei a) ist $\hat{s}_n = 19,27$ und das 90 %-Konfidenzintervall für μ berechnet sich als $[303.6, 318.5]$ (Dezimalpunkt verwendet).

Zu Aufgabe 16.6.3

Ergebnisse:

- a) Das 95 %-Konfidenzintervall für μ ist: $[69.0, 73.5]$
 b) $\alpha = 38 \%$, d. h. Das Konfidenzniveau bei einem Fehler von $d = 1$ t ist sehr schlecht, nämlich nur 62 %.
 c) Um ein Konfidenzniveau von 95 % bei einem Fehler von ± 1 t zu erreichen, muss man mindestens 62 Versuchsfelder bestellen.

Zu Aufgabe 16.6.4

Ergebnis: Für die Kontrollgruppe ist $[24.6, 57.8]$ und für die Gruppe mit Zusatzfutter ist $[42.7, 70.9]$ das gesuchte Intervall.

Zu Aufgabe 16.6.5

Ergebnis: Das gesuchte Intervall ist $[48.2\%, 49.4\%]$ oder $p = 48.8 \pm 0.6\%$.

Zu Aufgabe 16.6.6

- a) Es ist $a = \text{Max}\{N; P_N(Y \leq 4) \leq 0,1\}$ zu bestimmen. Aus der Tabelle lesen wir ab, dass $P_l(Y \leq 4) < 0,1$ ist für $l \leq 59$ und $P_l(Y \leq 4) \geq 0,1$ für $l \geq 60$. Z. B. ist $P_{59}(Y \leq 4) = 0,0910$ und $P_{60}(Y \leq 4) = 0,1026$. Wir erhalten also $a = 59$. $]59, \infty[$ ist ein nach unten einseitiges Intervall der Konfidenz von 90 %. Oder anders ausgedrückt: Mit 90 % Sicherheit ist $N > 59$.
 b) Es ist $b = \text{Min}\{N; P_N(Y \leq 5) \geq 0,95\}$ zu bestimmen. Aus der Tabelle lesen wir ab, dass von $N = 134$ bis $N = 135$ die Wahrscheinlichkeit von 0,95 überschritten wird. Insbesondere ist $P_{134}(Y \leq 5) = 0,9494$ und $P_{135}(Y \leq 5) = 0,9511$. Wir erhalten also $b = 135$. $] - \infty, 135]$ ist ein nach oben einseitiges Intervall der Konfidenz von 95 %. Oder anders ausgedrückt: Mit 95 % Sicherheit ist $N < 135$.

18.17 Zum 17. Kapitel

Zu Aufgabe 17.15.1

Der Mittelwert der Stichprobe war bereits in Abschnitt 16.3.1 mit 310,75 angegeben worden. Es ist ein einseitiger Test durchzuführen. Daher lauten die Hypothesen: $H_0 : \mu \geq \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$. Der Testwert ist $t = (\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$. Genau für $t \geq -z_{0,01}$ wird H_0 angenommen. Im Zahlenbeispiel ist diese Ungleichung erfüllt: $2,404 \geq -2,326$. Infolgedessen wird H_0 angenommen. Mit dem P-Wert lautet die Testungleichung $PW = \Phi(t) \geq \alpha$, die in diesem Beispiel mit $0,9919 \geq 0,01$ erfüllt ist. Also ergibt auch die P-Wert-Methode, dass H_0 akzeptiert wird.

Zu Aufgabe 17.15.2

Es ist der zweiseitige t-Test zum Vergleich zweier Erwartungswerte bei unverbundenen Stichproben anzuwenden. Siehe 17.4.5. Man erhält als Testgröße $t = -2,428$. Für $|t| \leq t_{8;0,025}$ ist H_0 beizubehalten. Da $t_{8;0,025} = 2,306$ ist, gilt diese Ungleichung nicht, H_0 wird verworfen.

Der P-Wert ist $PW = F(|t|)$, wobei F die Verteilungsfunktion der t_8 -Verteilung ist. Es ergibt sich $F(2,428) = 0,9793$ und folglich ist $F(|t|) > 0,975$, d. h. $|t|$ liegt im Ablehnungsbereich von H_0 . Auch die Alternative mit dem P-Wert liefert die Ablehnung von H_0 .

Zu Aufgabe 17.15.3

Die Hypothesen lauten: $H_0 : N \leq 80$, $H_1 : N > 80$

Aus der Tabelle der Hypergeometrischen Verteilung berechnet man

$P_{80}(\leq 0) = 0,0012$, $P_{80}(\leq 1) = 0,0128$, $P_{80}(\leq 2) = 0,0625$, $P_{80}(\leq 3) = 0,1874$, $P_{80}(\leq 4) = 0,3924$

Daraus folgt $k_0 = \text{Max}\{l; P_{80}(Y \leq l) < 0,2\} = 3$. Wegen $k = 2$ ist $k \leq k_0$. Die Nullhypothese wird abgelehnt.

Zu Aufgabe 17.15.4

Der Testwert berechnet sich als $t = 5,413$.

Beim zweiseitigen Test brauchen wir das Quantil $t_{9;0,025} = 2,262$. Da $t > t_{9;0,025}$ ist H_0 abzulehnen.

Beim einseitigen Test von $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ gegen $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ wird das Quantil $t_{9;0,05} = 1,883$ benötigt. Wegen $t > -t_{9;0,05}$ ist H_0 anzunehmen.

Zu Aufgabe 17.15.5

Es ist der F -Test durchzuführen. Man erhält: $s_1^2 = 179,2$, $s_2^2 = 376,7$, $t = s_1^2/s_2^2 = 0,4757$, $F_{4;4;0,025} = 0,104$, $F_{4;4;0,975} = 9,605$. Es ist $0,104 \leq 0,4757 \leq 9,605$, folglich wird H_0 bestätigt.

Alternative mit dem P-Wert: $0,025 \leq F_{4;4}(0,4757) = 0,245 \leq 0,975$. Die Berechnung des P-Wertes bestätigt ebenfalls die Nullhypothese.

Zu Aufgabe 17.15.6

Diese Fragen sind mit dem χ^2 -Anpassungstest zu beantworten. Das benötigte Quantil ist $\chi_{1;1-\alpha}^2 = \chi_{1;0,95}^2 = 3,84$. Man erhält bei der ersten Frage $\chi^2 = 2$ und bei der zweiten $\chi^2 = 8$. Im ersten Fall kann nicht nachgewiesen werden, dass der Würfel irregulär ist, im zweiten jedoch schon, und zwar mit 95-prozentiger Sicherheit.

Die P-Werte ergeben sich zu 0,843 bzw. zu 0,995, was $< 0,95$ bzw. $> 0,95$ ist. Dies führt, wie zu erwarten, zu den gleichen Antworten auf die gestellten Fragen wie bei der Quantil-Methode.

Zu Aufgabe 17.15.7

Es ist der χ^2 -Unabhängigkeitstest anzuwenden. Die Tabelle der erwarteten Häufigkeiten ist

	t	$\bar{t}$	
f	257	231	488
$\bar{f}$	5014	4498	9512
	5271	4729	10000

Der Testwert berechnet sich zu $\chi^2 = 224$ und das obere α -Quantil der χ^2_1 -Verteilung ist 3,84. Wegen $\chi^2 > \chi^2_{1;\alpha}$ sind Geschlecht und Farbenblindheit abhängige Zufallsgrößen.

Entscheidung mit dem P-Wert: Es ist $PW = 1,0000 > 0,95$, folglich wird die Unabhängigkeit abgelehnt.

Zu Aufgabe 17.15.8

$$\chi^2 = 92 \cdot (27 \cdot 31 - 15 \cdot 19)^2 / (42 \cdot 46 \cdot 50 \cdot 46) = 6,309$$

$\chi^2_{1;0,05} F^{-1}(0,95) = 3,841$, wobei F die Verteilungsfunktion der χ^2_1 -Verteilung ist.

Da $\chi^2 > \chi^2_{1;0,05}$ sind mit 95 % Sicherheit die unteren Zentralwerte der beiden Sorten nicht gleich. Die beiden Sorten sind unterschiedlich ertragreich.

Zu Aufgabe 17.15.9

Angabe von Binomialkoeffizienten, die für die Lösung der Aufgabe gebraucht werden:
 $\binom{16}{5} = 4368$, $\binom{8}{5} = 56$, $\binom{8}{4} = 70$

Die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten sind $P(k) = \binom{8}{k} \binom{8}{5-k} / \binom{16}{5}$. Es berechnen sich:

$P(\{0\}) = 0,0128 < 0,025$, $P(\{0,1\}) = 0,1410 \geq 0,025$. Deshalb ist der untere Ablehnungsbereich $\{0\}$.

$P(5) = 0,0128 < 0,025$ und $P(\{5,4\}) = 0,1410 \geq 0,025$. Daher ist $\{5\}$ der obere Ablehnungsbereich.

Jedenfalls liegt der Testwert 0 im Ablehnungsbereich, d. h. der Verkaufserfolg hängt von der Verpackung ab.

Das selbe Ergebnis bringt der P-Wert $P(l) = P(0) = 0,0128$; denn $0,0128 < 0,025 = \alpha/2$.

19 Mathematische Zusätze

19.1 Zum Kapitel 1: Zahlen

Zu 1.1.23: Auswahlen ohne Reihenfolge mit Wiederholungen

Es gibt $\binom{n+l-1}{l}$ Möglichkeiten, aus einer Menge von n Elementen l Elemente mit Wiederholung auszuwählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Beweis:

Die Elemente von M bezeichnen wir mit den Ziffern $1, 2, 3, \dots, n$. Damit wir eine solche Auswahl nicht mehrmals in verschiedenen Reihenfolgen anschreiben, schreiben wir immer zuerst die kleineren Ziffern auf. Für $n = l = 3$ erhalten wir z.B.

111 112 122 222
 113 123 223
 133 233
 333

Es gibt 10 solche Auswahlmöglichkeiten und $10 = \binom{3+3-1}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Im Allgemeinfall trennen wir die Zifferngruppen durch Kommas, auch dann, wenn die Zifferngruppe etwa der Ziffer 1 gar nicht vorkommt. Das versteht man am besten, wenn es am obigen Beispiel einmal durchgeführt wird:

111, 11,2, 1,22, ,222,
 11,,3 1,2,3 ,22,3
 1,,33 ,2,33
 ,,333

In jedem Fall hat man $n-1$ Kommas hinzugefügt. Die können an $n-1+l$ Stellen sitzen. Außerdem bestimmen die Stellen der $n-1$ Kommas die ursprüngliche Auswahl eindeutig. Die Stellen der $n-1$ Kommas bilden eine $(n-1)$ -elementige Teilmenge der Menge der $n+l-1$ Stellen. Davon gibt es aber nach 1.1.15 genau $\binom{n+l-1}{n-1}$ Teilmengen, was nach Abschnitt 1.1.18, Gleichung (5) auch gleich $\binom{n+l-1}{l}$ ist.

Hiermit ist der Beweis erbracht.

Zu 1.2.6: Rechenregeln

$$1. a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad 2. (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad 3. a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Diese Regeln sind leicht einzusehen:

$$\text{Zu 1: } a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(n+m) \text{ Faktoren}}.$$

Denn man darf bei Produkten reeller Zahlen beliebig Klammern setzen. Die rechte Seite ist also gleich a^{n+m} .

$$\text{Zu 2: } (a^n)^m = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}) \cdot \dots \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a})}_{m \text{ Faktoren } a^n}.$$

Rechts steht insgesamt ein Produkt von $n \cdot m$ Faktoren a . Die rechte Seite ist also gleich $a^{n \cdot m}$.

Zu 3: Auf jeder Seite stehen n Faktoren a und n Faktoren b nur in anderer Reihenfolge. Bei der Multiplikation reeller Zahlen kommt es aber auf die Reihenfolge der Faktoren nicht an.

19.2 Zum Kapitel 5: Kombinatorische Modellbildung

Zu 5.3.5: Erwartungswert der (n, p) -Binomialverteilung

Der Erwartungswert der (n, p) -Binomialverteilung ist $\mu_{n,p} = np$. Das ist diejenige Stelle, die das Intervall von 0 bis n im Verhältnis $p : (1 - p)$ teilt

Denn:

$$\begin{aligned} \mu_{n,p} &= \sum_{l=0}^n l b_{n,p}(l) & q &:= 1 - p \\ &= \sum_{l=0}^n l \binom{n}{l} p^l q^{n-l} \\ &= \sum_{l=1}^n l \binom{n}{l} p^l q^{n-l} & l \binom{n}{l} &= l \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-l+1)}{l(l-1) \cdot \dots \cdot 1} = n \binom{n-1}{l-1} \\ &= \sum_{l=1}^n n \binom{n-1}{l-1} p^l q^{n-l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n p \sum_{l=1}^n \binom{n-1}{l-1} p^{l-1} q^{(n-1)-(l-1)} \quad l-1 =: m \\
&= n p \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m q^{(n-1)-m}}_{(p+q)^{n-1} = 1} = n p
\end{aligned}$$

Zu 5.3.6: Varianz der (n, p) -Binomialverteilung

$$\sigma_{n,p}^2 = n p (1-p) = n p q$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,p}^2 &= \sum_{l=0}^n l^2 b_{n,p}(l) - \mu_{n,p}^2 \\
&= \sum_{l=1}^n l n \binom{n-1}{l-1} p^l q^{n-l} - n^2 p^2 \\
&= n p \left(\underbrace{\sum_{l=1}^n (l-1) \binom{n-1}{l-1} p^{l-1} q^{(n-1)-(l-1)}}_{\mu_{n-1,p}} + \underbrace{\sum_{l=1}^n \binom{n-1}{l-1} p^{l-1} q^{n-l}}_{(p+q)^{n-1} = 1} \right) - n^2 p^2 \\
&= n p ((n-1)p + 1) - n^2 p^2 \\
&= n p (n p - p + 1 - n p) = n p (1-p) = n p q
\end{aligned}$$

19.3 Zum Kapitel 9: Differenzialrechnung**Zu 9.1.2: Mittlere Änderungsrate**

Die Größe $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ heißt allgemein *mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[t_0, t]$* .

Dass dies eine sinnvolle Bezeichnung ist, wird durch folgende Aussage bekräftigt.

Wir unterteilen das Intervall $[t_0, t]$ durch die Teilpunkte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\Delta t = (t - t_0)/n = t_i - t_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Dann ist die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[t_0, t]$ das arithmetische Mittel der mittleren Änderungsraten in den Teilintervallen, wie folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)) \\
 &= \frac{1}{n \Delta t} (f(t_n) - f(t_{n-1}) + f(t_{n-1}) - f(t_{n-2}) + f(t_{n-2}) - \dots + f(t_1) - f(t_0)) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{\Delta t} + \frac{f(t_{n-1}) - f(t_{n-2})}{\Delta t} + \dots + \frac{f(t_1) - f(t_0)}{\Delta t} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} + \frac{f(t_{n-1}) - f(t_{n-2})}{t_{n-1} - t_{n-2}} + \dots + \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right)
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir für $\Delta y_i := f(t_i) - f(t_{i-1})$:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\Delta t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i}{\Delta t} \quad (1)$$

Damit haben wir die Aussage nachgerechnet.

Weitere Ergänzung zu Kapitel 9

Bei allen im folgenden auftretenden Limes darf es sich um einen Limes gegen eine reelle Zahl oder gegen ∞ handeln.

Häufig tritt der Fall auf, dass man den Limes eines Quotienten bilden soll

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (2)$$

bei dem Zähler und Nenner für $x \rightarrow a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞ gehen.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ bzw. } \infty \quad (3)$$

Im Falle, dass f und g differenzierbar sind, kann dann oft die Frage nach der Existenz des Limes (2) und seine Berechnung erledigt werden durch die Betrachtung von

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4)$$

Dafür gelten

Die de l'Hospitalischen Regeln

Existiert (4) dann auch (2) und $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Außer (3) und der Differenzierbarkeit von f und g wird dabei noch folgendes vorausgesetzt:

1. $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind Funktionen auf demselben offenen Intervall I , dessen Grenzen auch $-\infty$ oder ∞ sein dürfen.
2. a ist eine Intervallgrenze von I .
3. $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Für $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ kann man sich die Gültigkeit der de l'Hospitalischen Regel aus dem Mittelwertsatz verständlich machen. Wir setzen $f(a) = g(a) := 0$. Dann wird

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_1)(x - a)}{g'(c_2)(x - a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

Tatsächlich kann gezeigt werden, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (5)$$

ist mit dem gleichen c im Zähler und Nenner, wobei c zwischen a und x liegt (verallgemeinerter Mittelwertsatz). Für x gegen a geht dann auch c gegen a . Da in (5) der Limes rechts für $c \rightarrow a$ existiert, muss auch der Limes links für $x \rightarrow a$ existieren, und die beiden Limes müssen übereinstimmen.

Beispiele

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = -1$ für $x \in]0, 1[$ wie für $x \in], \infty[$,
(Nach der Formulierung des Satzes muss 1 eine Intervallgrenze sein.) also auch für $x \in]0, \infty[$ mit $x \neq 1$.

2. Für $\rho > 0$ und $x > 0$ ist:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\rho} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}}{\rho x^{\rho-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} x^{-1} x^{1-\rho} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} x^{-\rho} = 0$$

3. Seien $\lambda, \rho > 0$ und $x > 0$. Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\lambda x}}{x^\rho} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^{\lambda x}}{\rho x^{\rho-1}} \stackrel{!}{=} \dots$
 $\stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k e^{\lambda x}}{\rho(\rho-1) \dots (\rho-k+1) x^{\rho-k}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{K} e^{\lambda x} x^{k-\rho} = \infty.$

Dabei sei $K = \rho(\rho - 1) \dots (\rho - k + 1)$ und k die kleinste natürliche Zahl, so dass $\rho - k \leq 0$ ist. Es ist $K > 0$.

4. Der reziproke Quotient zum 3. Beispiel konvergiert gegen 0.

$$\text{Für } \lambda, \rho > 0 \text{ und } x > 0 \text{ ist } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\rho e^{-\lambda x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\rho}{e^{\lambda x}} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ für } x > 1.$$

Das Ausrufezeichen markiert die Stellen, wo eine de l'Hospitalsche Regel angewendet wird. In der Praxis geht man zunächst so vor, als ob die de l'Hospitalsche Regel gilt. Nachher ist festzustellen, ob alle Voraussetzungen dafür erfüllt waren, ob die Gleichheitszeichen an den markierten Stellen berechtigt waren.

19.4 Zum Kapitel 6: Diskrete Entwicklungsprozesse

Zu 6.6.7: Satz über den Grenzwert einer konvergenten Entwicklung

Ist x_n eine für $n \rightarrow \infty$ konvergente Populationsentwicklung, die der Gleichung 6.6.5 genügt, dann kommt als Grenzwert $\hat{x}$ nur 0 oder $\frac{a-1}{b}$ in Frage.

Beweis:

Wir benutzen die Regeln für Konvergenz, die besagen, dass der Limes einer Summe gleich der Summe der Limes ist. Das Analoge gilt für Produkt und Quotient, wobei in der Quotientenregel vorausgesetzt werden muss, dass kein auftretender Nenner 0 ist. Ferner beachten wir, dass der Limes des c -fachen einer Folge gleich dem c -fachen des Limes der Folge ist.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - bx_n^2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) - b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 \\ \hat{x} &= a\hat{x} - b\hat{x}^2 \\ 0 &= \hat{x}(a - 1 - b\hat{x}) \\ \hat{x} = 0 \quad \text{oder} \quad a - 1 - b\hat{x} &= 0 \\ \hat{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \hat{x} &= \frac{a-1}{b} \end{aligned}$$

19.5 Zum Kapitel 11: Integralrechnung

Zu 11.4.2: Beispiele aus der Statistik

$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0, \text{ wobei } \lambda > 0 \text{ konstant ist.} \end{cases} \quad (6)$$

Wir berechnen ein uneigentliches Integral, das in der Statistik auftritt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = 0 + \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-\lambda b} + 1) = 1$$

Wir halten fest:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (7)$$

Wir berechnen ein weiteres in der Statistik auftretendes uneigentliches Integral, Beim dritten Gleichheitszeichen wird 11.3.6 benutzt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx &= \int_0^{\infty} f(x) x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(- \left(x + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(- \left(b + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Wir notieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx = \frac{1}{\lambda} \quad (8)$$

Wir berechnen ein drittes für die Statistik gebrauchtes uneigentliches Integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 dx \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 dx && \text{nach (3)} \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\lambda x} \left[x^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right] \right) \Big|_0^b && \text{nach 11.3.7} \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-\lambda b} \left[b^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right] + \frac{1}{\lambda^2} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem 4. Beispiel von Abschnitt 19.3.

Wir haben also folgende Formel gefunden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 dx = \frac{1}{\lambda^2} \quad (9)$$

19.6 Zum Kapitel 12: Kontinuierliche Entwicklungsprozesse

Zu 12.1.2: Satz über die Eindeutigkeit einer Lösung

Bei gegebenem x_0 ist $x_0 e^{pt}$ die einzige Funktion mit $x(0) = x_0$, die die Differentialgleichung

$$x' = p x \quad (10)$$

erfüllt, also die einzige *Lösung* dieser Differentialgleichung zu gegebenem Anfangswert x_0 . D. h.:

Sei z. B. $x_0 > 0$ und $f(t)$ irgendeine Funktion mit $f'(t) = p f(t)$ und $f(0) = x_0$. Dann ist $f(t) = x_0 e^{pt}$ oder äquivalent

$$\frac{f(t)}{x_0 e^{pt}} = 1 \quad (11)$$

Dies zeigt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(t)}{x_0 e^{pt}}\right)' &= \frac{x_0 e^{pt} f'(t) - f(t) p x_0 e^{pt}}{(x_0 e^{pt})^2} \\ &= \frac{x_0 e^{pt} p f(t) - f(t) p x_0 e^{pt}}{(x_0 e^{pt})^2} = 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{f(t)}{x_0 e^{pt}} = c \quad \text{konstant}$$

$$\frac{f(0)}{x_0 e^{p0}} = \frac{x_0}{x_0} = 1$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß die Konstante $c = 1$ ist, und daraus Gleichung (11).

Zu 12.3.7: Übergang zum zugehörigen diskreten Prozeß

Wir können einen kontinuierlichen logistischen Prozeß zu den diskreten Zeitpunkten $j = 0, 1, 2, \dots$ betrachten und erhalten einen diskreten Entwicklungsprozeß. Dieser gehorcht jedoch nicht, wie man denken könnte, einem diskreten logistischen Gesetz, sondern einem rationalen Gesetz. Dies sieht man folgendermaßen:

$$x_j = x(j) = \frac{K}{1 + De^{-pj}} \quad \Rightarrow$$

$$(*) \quad De^{-pj} = \frac{K}{x_j} - 1$$

$$x_{j+1} = \frac{K}{1 + De^{-p(j+1)}}$$

$$= \frac{K}{1 + De^{(-pj)}e^{-p}} \quad (*) \text{ einsetzen}$$

$$= \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_j} - 1\right)e^{-p}} \quad \text{erweitern mit } x_j$$

$$= \frac{Kx_j}{x_j + (K - x_j)e^{-p}}$$

$$= \frac{Kx_j}{x_j(1 - e^{-p}) + Ke^{-p}} \quad \Rightarrow$$

$$= \frac{(K/(1 - e^{-p})) x_j}{x_j + (K/(1 - e^{-p})) e^{-p}} \quad \Rightarrow$$

$$x_{j+1} = \frac{Ax_j}{x_j + B} \tag{12}$$

mit $A = (K/(1 - e^{-p})) = \frac{Ke^p}{e^p - 1}$ und $B = (K/(1 - e^{-p})) e^{-p} = K \frac{1}{e^p - 1}$.

Für kleines p können die Formeln durch einfachere approximiert werden, wenn wir $e^p = 1 + p$ setzen. Dann folgt $A = K \frac{1+p}{p}$, $B = \frac{K}{p}$ für kleines p .

Da das rationale Modell (12) auf dem logistischen Gesetz beruht, modelliert es wie das logistische Modell innerspezifische Konkurrenz und Beschränkung des freien Lebensraumes.

Mathematik für Biowissenschaftler

Grundlagen mit Schwerpunkt Statistik für den Bachelor

Riede, A.

2015, XII, 296 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-03686-7